关于现代几何学研究的比较考察

——1872年在爱尔朗根大学评议会及哲学院开学典礼上提出的纲要

菲利克斯·克莱因(Felix Klein)[(1)]

五十年来，在几何学领域取得的成果中，射影几何学的发展，占有头等地位（见本文末注释一），如果说，起初，所谓度量关系，由于它们在射影之下不是保持不变的，似乎难于用射影几何学来讨论，那么现在，人们已经习惯于用射影的观点体会这些关系了，以至于现在，射影的方法囊括了整个几何学。可是在那里，度量性质不再作为空间实体的内在性质出现，而是作为这些实体和一个基本元素即无穷远虚圆的关系出现。

如果把初等几何学的诸概念同由于考察空间实体而逐渐积累起来的方法相比较，就会引导人们去探索一个普遍原则，根据这个原则，可以建立起这两种方法。由于除了初等几何学和射影几何学之外，还有发展很缓慢然而也必须给予同样的存在权利的其他方法，所以这个问题显得更加重要。比如反演几何学、有理变换几何学等几何学就是这样。此后，我们还要提及和阐述这些几何学。

当我们在此着手建立一个这样的原则的时候，我们的确没有发挥任何特别的想法。我们只是把许多人所或多或少明确地想着的东西，给以一个明确的表达方式。几何学尽管本质上是一个整体，可是，由于最近期间所取得的飞速发展，却被分割成为许多几乎互不相干的分科（见注释二），其中每一个分科几乎都是独立地继续发展着，于是，公开发表旨在建立几何学的这样一种内在联系的各种考虑，就显得更加必要了。我们还特别想陈述一下由李(Lie)和我在最近的工作中发展起来的方法和观点。这两方面的工作的论题尽管不同，但它们在这里阐明的考察事物的一般方法达到的目的却是一致的；因而，再次讨论考察事物的一般方法并从这方面刻划这些工作的内容和趋势是很有必要的。

如果说，迄今为止我们只谈到了几何研究，那么这种研究事实上应该把任意维流形的研究和普通的几何研究一起包括在内。这种任意维流形是人们从几何学中舍弃了而从纯数学观点看来并非本质的图形而抽象出来的（参阅注释三和四）。关于维流形的研究包含着与几何学同样多的各种类型，并且，象几何学的研究一样，还应该明确指出彼此独立开展的研究

---

(1) 在«数学年鉴»(*Annali di Matematica*)刊载了我的«爱尔朗根纲要»的一个意大利文译本以后，大约一年以前，我以很高兴的心情接受了帕得(**Padé**)先生要出版一个法译本的建议，因为目前群论似乎在法国受到空前的重视，我的纲要内容，也许将在那里激起一些关心。在意大利文本中，我对正文作了少量修改并加了某些附注，基本上原封不动，正文中统统用[ ]标明。在此后的工作中，不管多么接近我的论题，我也没有引用。因为有系统地总结 **1872** 年以后发表的成果是一个长期的任务，我觉得，对于我的纲要，若没有一个完全和详细的修改，不可能把其中的中心思想清楚地表达出来。我希望将来可以完成它。

之共同点和不同点。从抽象的观点看来，下文中只需要谈论多维流形；但是，如果把这个论述和我们最熟悉的空间概念联系起来，它就变成最简单的并且是一目了然的了。从考察几何实体出发，并把它们作为例子来阐明和展开一般性想法，我们就是遵循着科学在它自己的发展中走过的道路，这也就是取作我们阐述的基础的通常最有利的道路。

要在这里预先提示一下下文的内容是不可能的，因为不大可能把这个内容归纳为一个最简洁的形式[2]；而各节的标题将给出思想的一般发展过程。在结尾的地方，我加了一系列的注释。在这些注释中，当我感到这对理解正文是有用时，就对一些特定点作了进一步的阐述 ；要不然，我就尽力把本文考察中所采用的抽象的数学观点和同它有关的诸观点区分开来。

一、空间变换群　主群一般性问题的提出

在下面就要进行的诸考察所需要的一些概念中，最本质的就是空间变换群的概念。

任意多个空间变换[3]的组合，总是又给出一个这样的变换。现在我们假定，一个给定的变换集合有这样的性质，即变换集合中任意多个变换的组合构成的每一变换也属于这个集合，那么，这样的集合就构成一个变换群[4][5]。

位移（每一个位移被看作在整个空间上实行的一次运算）的集合提供了变换群的一个例子。例如，环绕一点的旋转[6]所构成的群就是其中的一个。反之，包含位移群的群可以由直射变换的集合构成。相反，对偶变换的集合并不构成群，因为两个这样的变换的组合给出一个直射变换；但是，人们把对偶变换和直射变换结合在一起，就重新获得了一个群[7]。

有一些空间变换，它们不变更图形的几何性质。这些几何性质，按对其本身的理解，独立于被考虑的图形在空间中占有的地位，独立于图形的绝对量并最后独立于图形的各部分被安置的定向[8]。那么，空间的位移、相似变换和对称变换不变更图形的性质。同样，由上述变换结合成的变换也不变更图形的性质。我们称所有这些变换的集合为空间的变换主

(2) 这种表达形式的过于简洁是我的文章的一个欠缺。我耽心，这会把对文章的理解变得明显地更难接受。可是，我不能用一个非常冗长的表达式来弥补这个欠缺，因为那样的话，在这里仅仅涉猎一下的一些特定的理论，就得详细加以发挥。

(3) 我们的意思是说，变换总是应用于空间的全体元素，因而我们简单地称作空间变换。一些变换，例如对偶变换，可以不是点的变换而引入新的元素。在本文中，这种情况和别的情况不加区别。

(4) 这个定义还需要下面的补充。在本文的群中，实际上暗含着如下的假定，在那里出现的一切运算都伴随着它的逆运算；但是在有无穷多个运算的情况下，这当然不是群概念本身的一个必然结果；因此，这应当是一个被明确加进群的定义中的假定，如同在本文中所给的那样。

(5) 这个概念和名称都是从替换论中借用的，在那里，人们不是把它看作一个连续域的变换，而是看作有限多个离散量的排列。

(6) 卡米耶・约当（Camille Jordan）定出了包含在位移群里的所有的群如关于运动的群。(**Annali di Matematica, t. II**)

(7) 此外，一个群的变换在这里连续不断地出现，是毫无必要的，尽管对我们就要谈及的所有的群，总是这种情况。例如，使一个规则物体能够自我覆盖的有限次位移，形成一个群；同样，使一条正弦曲线无限次不连续的自我迭加的位移，也形成一个群。

(8) 在这里，应该把方向理解为序的性质(定向)。由于序性，一个图形不同于它的对称图形（反射象）。同样，由于定向，右螺旋线不同于左螺旋线。

群[9]；图形的几何性质在变换主群的变换之下保持不变。逆定理同样是正确的：图形的几何性质被它们在主群的变换之下的不变性所描绘。诚然，如果人们暂时把空间看作不能位移，看作一个定流形，那么每一个图形就有它自己的个性。在这个图形，作为个体所具有的诸性质中只有那些在主群的变换下不变的性质才真正是几何的性质。在这里不很确定地提出的观点，将在以后的讨论中显得清楚些。

现在，我们将不管从数学的观点看来并非本质的物质图形，在空间中，我们只看到一个多维流形，例如，按照习惯的表达方式把点当成空间元素时，就只看到一个三维流形。与空间的变换类似，我们可以讨论流形的变换，它们也构成群。但是，不再象空间中那样，有一个按其本意来说区别于其他群的群；任何一个群，和别的群具有同等的作用。于是，作为几何的推广，就这样提出下列一般性问题：

给了一个流形和这个流形的一个变换群，以在这个变换群的变换之下其性质保持不变的观点研究这个流形的实体。

如果我们采用现时的说法，当然，这里只对一个确定的群即线性变换群用到这种说法。那么还可以这样来表达这个一般性问题：

给了一个流形和这个流形的一个变换群，建立关于这个群的不变性理论。

这便是一般性问题，即不仅囊括了通常的几何学，而且也囊括了我们必需一一考虑的现代几何学方法，以及任意维流形的各种研究方式。尤其需要指出的是，在选择附加于流形的变换群时还有任意性，和由这种任意性所导致的同等地允许满足一般性要求的所有处理方法的可能性。

二、一个包含另一个连接起来的变换群　几何学研究的各种类型及其相互关系

因为空间实体的几何性质在主群的一切变换之下都保持不变，所以，研究只对这些变换的一部分保持不变的性质，当然没有任何意义。然而，如果在空间图形与某些假定是固定的元素的关系方面来研究空间图形，那么，这个问题至少从程式上看来，是合理的。例如，正象在球面三角学中一样，我们考察空间的诸实体，其中有一特殊的点。那么，首先提出的问题就是：不再对空间的实体本身，而是对它们和这给定点一起构成的系统，来阐明在主群之下不变的性质。

但是，也可以用另外的方式提出这问题：假定这点固定，从在主群的变换之下的不变性的观点，研究空间的实体本身。换句话说，在空间图形上加进这给定的点，在主群的意义下研究这些空间图形，或者，什么点都不加进，但是用包含主群在内的且不改变某一相应点的变换群代替主群，来研究这些空间图形，这两者是同一回事。

这就是在下文中经常要用到的一个原则，由于这个原因，我们愿意从现在起以下列方式，对它作一般的描述。

给定一个流形，为了研究它，再给定一个变换群。现在的问题就是，研究流形的诸实体与其中特定的一个实体。那么，人们或者可以在实体的集合上加进这个特定实体，在已给定

(9) 由定义，这些变换必定构成一个群。

的群的意义下研究这个增广系统的性质，或者可以什么实体都不加进，但是，要限制作为研究基础的那些变换，使这些变换属于给定的群，并且不改变特定的实体（这些变换也必定形成一个群）。

现在，我们看一下本节开头提出的问题的逆问题。这个逆问题很容易理解，问题在于：探求空间实体的这样一些性质，它们在包含了主变换群的一个群的变换之下仍然保持不变。在这个研究中获得的每一个性质都是实体的内在的几何性质。但是，逆命题是不正确的。对于这个逆命题，我们刚刚建立的原则开始起作用，这时，主变换群是一个最小的群。于是，我们得到这样的定理：

如果用一个更广的群代替主变换群，那么只有一部分几何性质被保存下来。其他的性质不再作为这些几何实体的内在性质而出现，但仍然是给这些实体加进一个特定的实体后所得到的系统的性质。这个特定的实体，作为确定的[10]实体来说，一般有下述的特点：当它固定时，在给定的群的变换中仍作用于空间的只有主群的那些变换。

我们需要研究的新几何学方法的实质以及它与初等方法的关系寓于这个定理之中。诚然，它们由这样一个事实描绘其实质，即，它们的考察不是凭依主变换群，而是建筑在一些更广的变换群之上的。这些群既然互相包含，那么，一个类似的法则就确定了它们的互逆关系。这也适用于我们就要考察的多维流形的各种不同的研究方法。现在我们就要对每个特殊方法建立这种法则，并且，本节和前几节的关于一般情况的那些定理即将要在具体问题的应用中看得更清楚。

三、射影几何学

空间的每个不属于主变换群的变换可以应用于把已知图形的性质转移到新图形上去。这样，对于能表示在平面上的曲面几何学，就可以利用平面几何学；因此，在真正的射影几何学诞生前很久，人们就已经用曲面在平面上的投影推出的性质来确定一个已知图形的性质。但是，只有当人们习惯于把原来的图形和所有的由投影推演出来的图形完全看成本质上等同的东西时，并且只有习惯于表述这些投影性质，使得这种表达与投影带来的变化无关时，射影几何学才得以诞生。这就是采取第一节意义下的投影变换群作为诸考察的基础，并且，由此发现了射影几何学与普通几何学之间的差别。

对于空间的每一种变换，都可以设想出一个类似的发展进程，象我们刚刚叙述的那样；这是我们还要常常重复的。至于射影几何学的问题，这个发展进程还要分两步来进行。第一步在一些概念结构的扩充中通过在基本变换群中纳入对偶变换完成了。根据现代的观点，必须注意两个互为对偶的图形，我们不再把它们看成两个不同的图形，而是看成本质上是单一的和同样的图形。第二步的本质在于，通过在此采用相应的虚变换来扩充直射变换和对偶变换的基本群。这就要求人们首先采用虚元素来扩充空间固有元素的范围，正象在基本群中采用对偶变换就导致同时引入点和面作为空间元素一样。这里不是着重讲引入虚元素的作用的地方，其实，只有这个作用才能使空间理论和作为模型而采用的代数运算的领域对应起来；相反，必须特别强调这个事实，即，在考察代数运算中需要这种引入的理由，在射影

(10) 例如，如果把主变换群的变换应用于任何一个初始元素，而给定的群中没有一个变换能使这种初始元素再现，这时就引入了这样一个实体。

变换群和对偶变换群中则不复存在。如同在后者中，因为实直射变换和实对偶变换已经形成了一个群，我们可以局限于实变换一样，即使我们不立足于投影的观点，我们也可以引入虚元素，并且，只要我们的目的是研究代数实体，我们就应该这样做。

上一节的一般性定理指出了，按投影的观点，应该怎样设法说明度量性质。这种度量性质必须作为关于一个基本元素的投影关系来考察，这个基本元素就是无穷远虚圆[11]，亦即一个具有只能由也属于主变换群的射影群的变换变为它本身的性质的元素。我们如此直率地陈述的这个定理，还需要一个重要的补充，即限于对空间的实元素（和实变换）作通常的考察。于是，还应该明确地把无穷远虚圆补充到空间的实元素（点）系统上，以便与这个观点完全融洽。初等几何学意义下的性质如果是投影的性质，那么，它们要么是图形的固有性质，要么是，是一些关于这个实元素系统、或者关于无穷远虚圆，甚至同时关于两者的关系。

在这里，大家还可以回想起冯·斯托德（von Staudt）在他的方位几何学中怎样建立了射影几何学，这种射影几何学的基本群仅仅包含了实射影变换和对偶变换[12]。

在这部著作中，我们明白了，他如何仅从通常的诸考察的内容里取出在射影变换之下不变的东西。如果我们竟然想这样考察度量性质，那么，恰需把这些性质作为相对于无穷远虚圆的关系引入。这些思想进程如此完威后对在这里提出的诸考察有极大的重要性，因为，它使我们有可能在即将提出的诸方法的每一种意义下建立相应的几何学。

四、用基础流形的一个变换建立的相互关系

在转到陈述与初等几何学和射影几何学并列的那些几何学方法之前，我们可以一般地阐述一下经常在下文中再现的某些论述，对于这些论述，迄今为止所接触到的理论已经提供了足够数量的范例。本节和下一节就来谈谈这一点。

若取一个群 B 作基础来研究一个流形 A，如果，由任意一个变换把 A 变成了另一个流形 A'，那末，变 A 到自身的变换群 B 就变成了一个群 B'，它的变换变 A' 到自身。这时，**由取 B 为基础研究 A 的方法推出了取 B' 为基础研究 A' 的方法**，就是一个明显的原则。换句话说，A 的一个实体关于群 B 所具备的每个性质，给出了 A' 的一个相应的实体关于群 B' 所具备的一个性质。

例如，我们假定 A 是一直线，而 B 是变 A 到自身的三重无限线性变换。那么，关于 A 的研究恰恰就是现代代数学中人们称之为**二次形式理论**的内容。现在，通过对圆锥曲线上的点进行投影，我们就可以建立起直线上的点和平面圆锥曲线 A' 上的点之间的一个对应关系。显而易见，再现直线的线性变换 B 变成了再现圆锥曲线的线性变换 B'，即圆锥曲线的这样的变换，它们与再现圆锥曲线的平面线性变换相对应。

但是，根据第二节的原则[13]，当假定圆锥曲线是固定的，并且仅仅考察平面上再现它的线性变换而研究关于这条圆锥曲线的几何学，或者，考察平面上所有的线性变换，并且让圆

（11）这个概念应该作为 Chasles〔法文改为：法国学派的——译者〕最美好的成就之一来看待，只有它对于人们乐于放在射影几何学开端的度量性质与投影性质之间的差异给以一个确切意义。

（12）仅在《论方位几何学》(*Beiträge zur Geometrie der Lage*)中，冯·斯托德取最宽广的群作为基础，一些虚变换也在其中出现。

（13）如果人们愿意，这个原则此刻正在一个稍微普遍的形式中被应用。

锥曲线随之变化而研究关于这条圆锥曲线的几何学，这是同一回事。所以，我们就这条圆锥曲线的点系揭示的那些性质在通常意义下都是投影的性质。把这一点和前面的结果相联系，就会得到：

二次形式理论与一条圆锥曲线的点系的射影几何学是等价的，就是说，关于二次形式的每个定理，都有关于这条圆锥曲线的点系的一个定理相对应，反之亦然[14]。

下面就是为阐明这种研究方法而特有的另外一个例子。如果人们在平面上作一个二次曲面的球极平面投影，那么，在曲面上就出现一个基本点：投影点；在平面上就出现两个基本点：经过投影点之母线的交点。可是，人们立刻看出，不使两个基本点改变的平面线性变换经过映象变成了二次曲面的线性变换中再现二次曲面的那些变换，然而不使投影中心改变。（使曲面再现的线性变换在这里应该理解为当人们实施使曲面自我覆盖的空间线性变换时，曲面所服从的变换。）这样，带有两个基本点的一个平面的射影的研究和带有一个基本点的一个二次曲面的投影的研究是等价的。但是，如果使用虚元素，那么，前者仅仅是在初等几何学意义下的平面的研究。事实上，平面的主变换群恰恰是由使一个点对（无穷远圆点）不变的线性变换组成；那么，最终得到：

平面初等几何学和带有一个基本点的一个二次曲面的投影的研究是同一个东西。

人们可以随意增添这些例子[15]。我们选用了刚刚阐述的两个例子，因为在下文中，我们还有机会再谈到它们。

五、空间元素选择的任意性
Hesse（海赛）相关原理　线几何学

点作为直线的元素、平面的元素、空间的元素等等，和一般地一个有待研究的流形的元素可以用作为流形组成部分的对象：一个点集特别是一条曲线、一个曲面等等来代替点（见注释六）。由于人们使这个元素所依赖的诸任意参数的个数，无从预先加以确定，那么，直线、平面、空间等等视所选择的元素为何显现出具备某一任意维数。但是，只要取同一变换群为几何学研究的基础，那么，这种几何学的内容就不会改变，就是说，由空间元素的每一种选取所获得的每个定理，对于元素的另外选法，仍然是一个定理，只不过是这些定理的顺序及其内部联系发生了变化。

因而，首要之点就是变换群，至于流形的维数，只作为某种次要的东西而出现。

这个看法和上一节的原则相结合，就会得到一系列完美的应用，其中的某些应用要在这里阐述。事实上，只要稍加分析，就会看出，这些例子对于说明一般考察的意义是合适的。

根据上一节，关于一条直线的射影几何学（二次形式理论）相当于关于一条圆锥曲线的几何学。关于后者，现在我们可以用点对代替点作为元素来考察。于是，如果使每一条直线和它在那里与圆锥曲线相交的点对相对应，就可建立一条圆锥曲线的点对集合与平面上的直线集合之间的对应关系。由这种描绘，再现圆锥曲线的线性变换变成了使圆锥曲线不变

---

(14) 代替平面圆锥曲线，我们尽可取一条左旋的三次曲线，一般地，对于 n 组的情形，也可照此办理。

(15) 对于其他的例子，特别是对于推广到高维的时候，既可以参阅在我的一篇论文：«关于线几何和度量几何» (*Ueber Linien-geometrie und metrische Geometrie*, Math. Annalen, t. V,2)中所做的阐述；也可以参阅我们就要直接引用的李(Lie)的工作。

的平面(被看作由直线组成的)线性变换。然而，根据第二节，考察由后面这些变换构成的群，或者自始至终在要研究的平面图形上增添一条圆锥曲线而从平面线性变换的全体出发，是等价的东西，由此得出：

二次形式理论和带有一条基本圆锥曲线的平面射影几何学是等价的。

最后，既然由于群的同一性，带有一条基本圆锥曲线的平面射影几何学与人们可以在平面上关于一条圆锥曲线建立的射影度量几何学相吻合（见注释五），于是，我们还可以说：

二次形式理论和平面的一般度量射影几何学是同样的几何学。

在上面的分析中，我们还可以用一条空间三次曲线代替平面圆锥曲线，等等；但是，我们不想多化笔墨了。我们刚刚阐述过的平面几何学、空间几何学或一个任意维流形的几何学之间的联系，基本上和海赛（Hesse）提出的相关原理相一致（*Journal de Borchardt*, *t. LXVI*）。

空间射影几何学或者可以叫做四次形式理论，提供了一个有完全同类性质的例子。我们取直线作为空间的元素，并且，象在线几何学中那样，我们用由一个二阶方程联系在一起的六个齐次坐标确定它；那么，这些空间的线性变换和对偶变换就表现为设想有六个彼此独立的变量的线性变换中能使联系方程变为它本身的那些变换。正如我们刚刚阐述的那样，通过一系列类似的推演，就得到下列定理：

四次形式理论与由六个齐次变量产生的流形的射影度量的确定相一致。

至于这些观点的更详尽的阐述，我推荐最近在《数学年鉴》(Math. Annalen (t. VI))中刊载的一篇论文：《关于所谓非欧几何学第二次报告》(Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie)(zweite Abhandlung)以及本文结尾处的一个注释(参看注释二)。

对上面的论述，我们还要补充两点意见：第一点，实际上已经暗含在谈过的内容之中，但是，还必须再阐述一下，因为它所应用的对象是一个很容易误会的论题。

如果引入任何一些实体作为空间元素，那么就获得了某一个维数。但是，如果我们立足于习惯的观点(初等的或射影的)，那末对于多维流形，我们应取为基础的群，被先验地给出：它不是别的，仅仅是主变换群或射影变换群。但是，如果我们想取另外一个群作基本群，那么我们势必舍弃初等的或射影的观点。这样，通过空间元素的适当选择，这个空间表示一些若干维的流形是多么真实，同样，补充如下这点就多么重要：为了用这种表示研究这个流形，必须先验地取一个确定的群为基础，若不然，对于随意规定的群，就必须使之与我们的几何观念相适应。如果不加这个说明，人们就会去寻找，譬如说，一种如下形式的线几何学的表示法。在这种几何学中，一条直线有六个坐标，这恰恰是一条平面圆锥曲线的系数的数目。这样构造的线几何学是一个摒弃了其系数之间有二次关系的圆锥曲线集合的一个圆锥曲线系统的几何学。如果说被当作平面几何学基础的群是由这样的变换集合构成的群，这种变换是用一条圆锥曲线系数的线性变换表示的，并且，它们再现了二次条件方程，那么，这是正确的。但是，如果我们坚持平面几何学的初等的或射影的观点，那么，无论如何我们也得不到任何一个这样的表示法。

第二点意见与下面的概念有关。假定对于空间给定任意一个群，譬如说，一个主群，我们选择一个特定的图形，例如一个点，或者一条直线，甚或一个椭圆体等等，并且对它实行基本群的一切变换。这样，人们获得了一个多重无穷的流形，其维数一般等于在这个群中含有

的任意参数的数目；在某些特殊情形中，这个数目更小一些，就是说，那时，一开头被选定的图形有由群的无限个变换而再现的性质。如此引入的每个流形叫做关于母群的一个体[16]。如果现在，一方面，我们想在群的意义下研究空间，并且，为了这个目的，明确指出作为空间元素的确定的图形；而另一方面，我们又不想使一些等价的东西用不相同的方式表示出来，那末，我们当然应该选择空间的元素，使它们的流形形成一个单一的体，或者能够被分解为体[17]。晚些时候（第九节），我们将给出这个明确的注解的一个应用。体的概念本身，在最后一节，将结合同类性质的概念再次进行讨论。

六、反演几何学关于 $x+iy$ 的解释

在本节中，我们继续讨论几何研究的另外一些方向上的问题，这些问题已经在第二节、第三节里开始谈到了。

按照类似于射影几何的研究方法，对于运用反演变换这类几何观念的范畴，我们可以从各种角度加以考察。所谓四次圆纹曲面、自反曲面的研究与正交系一般理论的研究，以及势论的进一步研究，也都属于这种情况。如果说，人们在上述研究中还没有象射影几何一样，把主群与反演变换合在一起的变换集合构成群，以这群为基础总结出一种特殊的几何学，这完全归之于一种偶然情况，即直到现在，这些理论尚未成为系统阐述的对象；实际上，在这些方向上进行研究的少数作者，并不是完全没有这种方法上的见解。

将反演几何与射影几何作比较，二者的类似之处立刻就会显示出来，因此不必进行详细分析，而只需注意下列几点：

在射影几何中，基本概念是点、直线和平面。圆和球，只不过是圆锥曲线和二次曲面的特殊情况。初等几何的无穷远，在这里表现为一个平面；与初等几何相联系的基本图形，是无穷远虚圆锥曲线。

在反演几何中，基本概念是点、圆和球。直线与平面，是圆与球包含一个无穷远点时的特殊情况。这个无穷远点，从方法上来讲，丝毫也不比其它的点更特殊。只要假设这一点是固定的，就得到了初等几何。

如果按照前几节所指出的对于二次形式理论与线几何学的讨论，反演几何也会具有同样有效的形式。为了达到这个目的，我们不妨首先限于考察平面几何，并进而考察平面反演几何[18]。

关于初等平面几何与含有特殊点的二次曲面射影几何，它们之间的关系，已经讲过很多了（第四节）。如果把这一特殊点除外，只考虑曲面射影几何本身，它就构成了平面反演几

(16) 这个名称是根据戴德金（Dedekind）选定的，在数论中，如果一个数的集合是从已知的元素出发借助于给定的运算产生的，则这个数的集合叫做体。（戴德金《教程》新版）。

(17) 在本文中，没有充分注意所提供的群是不是能包含人们所谓的一些例外子群。如果，一个几何图形在一个例外子群的运算之下仍然不变，那么，通过整个群的运算从子群推演出来的所有图形都是一样的，并且归根结底，由此产生的一个体的所有的元素也都是一样的。现在，如此形成的一个体，对群运算的映象完全是非固有的。所以，在本文中，人们仅应该考虑这样一些体，它们源于不能被所提供的群的任何一个例外子群保持不变的空间元素。

(18) 直线反演几何相当于直线投影研究，因为两者的变换是一回事。因此，在反演几何中，可以讨论直线上与圆上四点的交比。

何。很容易理解[19]，依据二次曲面的映象，平面反演变换群对应于使二次曲面变成它本身的线性变换集合。因此：

平面反演几何和二次曲面射影几何是一回事。完全相应地有：

空间反演几何学和一个流形的射影研究是等价的，这个流形由五个齐次变量的二次方程来表示。

正如借助于线几何，使得空间几何与一个五维流形相连系一样，通过反演几何，空间几何也就与一个四维流形连系起来了。

只就实变换来说，反演几何从另一方面给我们提供了一种很有趣的表达方式和重要应用。如果按习惯方法在平面上表示复变量 $x+iy$，那么限定于实变换的反演群则与复变量的线性变换相对应[20]。但是，关于可进行任何线性变换的复变函数的研究，只不过是用一种稍稍不同的表达方法表示出来的所谓二次形式理论。因此，二次形式理论找到了在实平面反演几何中的表示法，而且，变量的复数值也被表示出来。

为了达到射影变换的最通常的表示范围，可以从平面转到二次曲面。由于我们只考虑平面的实元素，所以怎样选择曲面不再是不重要的了；但显然，曲面的选取必须不受限制。特别是，如同前面关于复变量的解释所做的那样，我们可以把这里的曲面设想为一个球面，并得到下述定理：

复变量二次形式理论可在实球面射影几何中找到它的表示法。

我觉得还应该在一个注释中指出（见注释七），用这种表示法怎样说明二元三次形式理论和双二次形式理论。

七、前述内容的推广　李球几何学

关于二次形式理论、反演几何学与线几何学如前所述是互相对应的，它们的区别只是变量数目的不同。我们现在所要阐述的某些推广，是与这三种理论联系在一起的。首先，这样一些推广再次有助于用新的例证说明这样的思想，即决定已知范围内研究方式的群可以被任意扩充；此外，我们的目的还特别在于，从与这里所谈思想的关系，来说明李在新近一篇论文[21]中提出的主要观点。为了更适合普通的几何直观，并且与前面谈到的内容联系起来，我们预先假定只在变量数目很少的情况下进行有关讨论。这时，我们达到李氏球几何学的方法，与李对于线几何概念所采取的方法有所不同。正如李所强调指出的《哥丁根新闻》(Göttinger Nachrichten 1871, n° 7.22)，这种考察与变量数目无关。它属于更重要的研究领域，即关于任意多变量的二次方程射影研究。这种研究，我们已经常常接触，并且

(19) 见已引证过的文章：«线几何和尺度几何»(*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalne.* Bd.V.)

(20)〔正文里的讨论方式不是很严格的。全体线性变换$z'=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$（其中 $z'=x'+iy'$, $z=x+iy$），仅仅对应于反演群里那些不使角度反转的变换（在这些变换下，平面上的循环点在角度中间不改变位置）。为了扩充到整个反演群，除了上述线性变换外，还必须添加如下的线性变换（它们并非不重要）：$z'=\dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$，其中仍有$z'=x'+iy'$，但 $\bar{z}=x-iy$。〕

(21) 偏微分方程与复数，«数学年鉴»，Bd.V (*Partielle Differentialgleichungen und Complexe.* Math. Annalen, Bd. V)

以后还要多次遇到(见第十节等)。

我首先用球极平面投影建立实平面与球面之间的关系。在第五节中，通过使平面上的直线对应于这条直线与圆锥曲线相交得到的点对,从而把平面几何与圆锥几何联系起来了。用同样方法,我们可以在空间几何与球几何之间建立一种对应关系,使得空间的每个平面对应于该平面与球相交所得到的圆。然后,如果通过球极平面投影,把球几何转换到平面上去,这时,每个球也都变成一个圆,那么就有下列二者的互相对应:

空间几何,它的元素是平面,它的群是把球变成它本身的线性变换群;

平面几何,它的元素是圆,它的群是反演群。

我们现在分两步把第一种几何加以推广。为此，要把这种几何的群用包含它的群来代替。所得到的推广结果,通过映象可以立即转换到平面几何上。

为了代替空间的使得球仍旧变成它本身的线性变换,这个空间是由平面构成的,我们可以很方便地选取空间的线性变换总体,或者选取空间的平面变换总体。这些变换〔在立即就要说明的意义下〕使球保持不变。于是,第一种情况排除了球,第二种情况排除了使用变换的线性特点。因而,第一个推广立刻就显而易见了。我们可以首先对它加以考察,并将其结论转换到平面几何上。然后,我们再继续讨论第二个推广,这时,必须先确定相应的更一般的变换。

空间的线性变换普遍具有下述性质，即平面束与平面把仍然变成平面束与平面把。但在球面上,一个平面束则变成一个圆束，也就是具有公共交点的单重无穷的一系列圆;一个平面把则变成一个圆把,也就是与一个固定圆正交的两重无穷的圆族(这个固定圆所在的平面，以已知平面把中各个平面的公共点为极点)。具有这种特点的圆变换，即圆束与圆把仍然变成圆束与圆把的圆变换(22),在球面上进而在平面上,对应于空间的线性变换。采用这种变换群得到的平面几何,就是普通空间射影几何的映象。在这种几何中,不能用点作为平面的元素,因为对于所选择的变换群来说,点不能构成一个体(第五节)。但是，我们可选择圆作为元素。

对于所说的第二个推广,首先应解决相应变换群的类型问题。为此,必须找到这样的平面变换，使得任何顶点位于球面上的平面把，又变成这样的平面把*。我们可以先通过对偶性，将问题转化为更简明的表达方式。另外一个步骤是使空间维数降低一维。我们还要找到这样的平面点变换，它们使已知圆锥曲线的任一条切线又重新变成同一条圆锥曲线的切线。为了达到这个目的,我们把平面连同位于它上面的圆锥曲线看作一个二次曲面的映象,这个映象是这样得到的：从不在该二次曲面上的一个空间点出发，把二次曲面投影到平面上,使已知的圆锥曲线表示过渡曲线。于是，曲面的母线与圆锥曲线的切线相对应，并且问题归之于找出使曲面变成它本身的点变换集合，而在这种变换下，母线仍然要变成母线。

存在无穷多个这样的变换,因为只需要把曲面的点看作两类母线的交点,并且用任何方法把每个直线族变成它本身,这就足够了。在这种变换中，特别是有线性变换，我们所要研究的也仅仅是这些线性变换。实际上,如果我们不是研究一般的曲面,而是研究由二次方程表示的多维流形,那么只有线性变换还继续有效,其它的变换就都被排除了(23)。

---

(22) 在格拉斯曼 (Grassmann) 的多维延量理论中,曾附带考察了这种变换(1862 年版,p. 278)。

* 法文译本上的这句话是:…使得轴与球相切的平面束又变成了一个这样的平面束。——译者

(23) 假如我们对流形作球极平面投影，就会得到著名的定理:在(空间的)多维域中,除反演群的变换之外，不存在任何保形点变换。在平面上恰恰相反,存在无穷多个这样的变换,见已引证过的李的著作。

这种再现曲面本身的线性变换，通过投影（非球极平面投影）转换到平面上，就得出了双值的点变换。在这种变换下，作为过渡曲线的圆锥曲线的任何切线，当然又重新变成一条切线。而一般地说，每条另外的直线要变成与过渡曲线两重相切的一条圆锥曲线。如果在构成过渡曲线的圆锥曲线上，建立一个射影度量，那么就能恰当地刻划这种变换群。于是，变换具有下述性质，即在这种度量意义下，相互距离等于零的点以及有固定距离的点，又变成这样的点。

所有这些考察，都能引伸到任意多变量的情形，尤其是也可以应用于开头就已提出的问题，这一问题中把球面与平面作为元素。在这种情况下，我们能够给这个结果以特别直观的形式，因为在一个球面上基于射影度量意义下，两个平面所形成的角，与通常意义下它们和球面截出的圆所形成的角相等。

因此，在球面上以及在平面上，我们得到了一个有如下性质的圆变换群，它把那些相切的圆（形成一个等于零的角）以及那些与某个圆相交成等角的圆，各自变成满足同样条件的圆。球面上的线性变换以及平面内的反演群的变换，都属于这个变换群[24]。

以这个群为基础的圆几何学，类似于李对于空间建立的球几何学，球几何学在研究曲面的曲率时有非常重要的作用。如同反演几何包括初等几何，在这样的意义下，圆几何包括反演几何。

我们刚刚得到的圆变换（球变换），特别是具有这样的性质，即把相切的圆（球）变成恰好也相切的圆（球）。如果我们把所有的曲线（曲面）都看作圆（球）的包络图形，那么相切的曲线（曲面）结果总是被变成也相切的曲线（曲面）。这里所谈到的变换属于以后将要做一般研究的切触变换（即使得图形的相切是不变的关系）。本节开始提到的格拉斯曼的圆变换以及类似的球变换，都不是切触变换。

如果说上述两种推广，仅仅涉及到反演几何，那么通过类似的方式同样适用于线几何，并且一般地说，也适用于对通过二次方程表示的流形作射影研究。这一点，我们已经指出过了，这里勿庸再述。

八、建立在点变换群基础上的其它方法

如果除开与改变空间元素联系在一起的对偶变换，那么初等几何、反演几何以及射影几

---

(24)〔下面的公式更清楚地说明了正文的论述。

设
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$
这是用通常的四面坐标表示的、且与平面有球极平面投影联系的球方程。如果诸 x 满足这个方程，那么它们就获得了平面上四圆坐标的意义，并且
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$
变成了平面上圆的一般方程。在计算这个圆的半径时，刚好得到平方根：
$$\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}\text{。}$$
我们用 iu_5 表示它。现在，可以把圆作为平面的元素来进行研究。于是，反演群就成为 u_1、u_2、u_3、u_4 的齐次线性变换集合。除一个因子外又产生了：
$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\text{。}$$
与李的球几何学相适应的更广泛的群，由五个变量 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5 的线性变换组成，除一个因子外，这五个变量又产生了：
$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2\text{。}〕$$

何,仅仅是可以想到的许多考察方法中的几个特例,这些方法一般以点变换群为基础。在这里,我们还要强调指出下列三种方法,这三种方法与刚刚讲到的考察方法有共同的特点,尽管这些方法远没有象射影几何那样,发展成为独立学科,但是仍然容易看出它们在现代研究中所处的地位(25)。

1. 有理变换群

关于有理变换,我们必须仔细辨别这种变换对于运算域(例如空间或平面等)的全体点是不是有理变换,或者仅仅对属于这个域的一个流形(例如曲面、曲线)上的点是不是有理变换。如果要在迄今所述的意义下建立空间几何和平面几何,只能采用第一种情况;从我们现在的观点出发,后一种情况只是在研究已知曲面或已知曲线的几何学时,才有重要意义。在我们立即就要谈到的拓扑学中,也同样要区别这两种情况。

然而,迄今所作的研究,实质上只涉及到第二类变换。由于我们不是讨论曲线几何与曲面几何的问题,这些问题必须找到判断两个曲面或两条曲线能够互相变换的一些准则,所以这些研究超出了我们这里所要考察的范围(26)。在本文中提出的一般方案,肯定不能囊括数学研究的全部,只不过是用共同的观点把某些方向统一起来。

以第一类变换为基础的有理变换几何学,现在刚刚开始研究。在一级域内,在直线上,有理变换和线性变换是恒同的,没有什么新内容。在平面内,我们当然已经知道了有理变换(Cremona 变换)的集合,它们是由二次变换的组合生成的。我们还知道平面曲线的不变特征:它们的亏格、模的存在;但实际上,这些研究在我们这里一般意义下的平面几何中还没有发展起来。对于空间来说,完整的理论则刚刚诞生。至今,我们对有理变换还了解得很少,并且就用这些知识把已知曲面与未知曲面通过映象联系起来。

2. 拓扑学*

在所谓拓扑学中,我们要研究由无穷小变形组成的变换的不变性。如前所述,在这里仍然要区别究竟是把整个域(例如空间)还是只把从它分出来的一个流形(即一个曲面),作为变换的对象。第一类变换是存在的,可以把它作为建立一种空间几何的基础。这类变换构成的群,实质上完全不同于我们迄今所考察过的群。因为它包括所有由设想为实无穷小的点变换组成的变换,所以它本身就从根本上局限于空间实元素,并且只能在任意函数域上变动。我们还能通过加进无穷远元素的实直射变换,把这种变换群适当地扩充。

3. 全体点变换的群

如果说关于这样的群,任何曲面都不具有独特的性质,因为通过这个群的变换,每个曲面都能变成任何另外一个曲面,那么还存在更高级的图形,在研究它的时候,这个群可以找到

---

(25) [在前面的例子中,我们只涉及到有限参数的群,我们现在来研究所谓无限群。]

(26) [然而很幸运,这些课题与我们的论述很有关系,只是我在 1872 年还不知道。给定任何一个代数形式(曲线、曲面等等)。如果作为坐标,引进关系式:

$$\varphi_1:\varphi_2:\cdots:\varphi_p = du_1:du_2:\cdots:du_p,$$

其中 $u_1, u_2, \cdots u_p$ 是关于曲线的第一类 **Abel** 积分,那么我们就可以使这个代数形式与一个高维空间联系起来。在这里,只有取 φ 的齐次线性变换群作为研究这个空间的基础。请参看 **Brill**、**Noether** 和 **Weber** 的有关著述以及我最近的论文:«贝尔函数的理论»。«数学年鉴» 第XXXVI 卷 (***Zur Theorie der Abel'schen Functionen*** **Math. Annalen** 第XXXVI卷。)]

* 原意是位置分析 (**Die Analysis situs**)。——译者

更好的应用。按照本文作为基础的几何学观点，即使至今还很少把这些图形看作几何图形，而仅仅看作偶而能找到几何应用的解析图形，并且在研究它们的时候，人们使用了直到我们这个时代才开始作为几何变换来理解的方法，这些都是无关紧要的。首先，齐次微分表达式就属于这种解析图形。偏微分方程也属于这种解析图形。正如下节所要阐述的，对于偏微分方程的一般讨论，全体切触变换群是最可取的。

在以全体点变换群为基础的几何学中，重要的基本定理是：对于空间的无穷小部分，一个点变换总是相当于一个线性变换。射影几何的发展，现在已经能应用到无穷小的情况，并且在讨论流形时，可以选择任意的群作基础——这正是射影方法的一个突出特点。

前面已经谈到了互相包含的群在考察方式上的关系，这里不再多谈这个问题了。我们只是再举出第二节中一般理论方面的一个例子。我们可以提出这样的问题，即怎样从“全体点变换”的观点来理解射影性质，这时可以排除实际上属于射影几何群的对偶变换。这个问题还可以用另一种方式表达：在什么条件下，线性变换群才能从点变换集合内区分出来。线性变换的特点是，它使任何平面都对应于一个平面：线性变换就是使平面流形仍然变成平面流形的点变换（或者，对于直线流形也有同样的结果）。射影几何是从全体点变换几何通过加进平面流形而推演出来的。这一点正如初等几何是从射影几何通过加进无穷远虚圆而推演出来的。例如，根据全体点变换的观点，我们可以特别把一个代数曲面的某一次数这一特征，理解为关于平面流形的一个不变关系。当我们象格拉斯曼那样，把代数曲面的形成与它们的直尺作图联系起来的时候，这一点相当明显。

九、全体切触变换群

很早以来，人们就考察过切触变换的一些特殊情况；雅可比（Jacobi）在解析研究中甚至还应用了最一般的切触变换。然而，切触变换只是通过李的最近的研究工作，才进入了最流行的几何概念的行列[27]。因此，明确解释一下切触变换究竟是怎么回事，或许并不多余。在这里，我们仍然象以前一样，只限于三维点空间的情况。

在切触变换下，我们要按解析的观点理解每一个这样的代换：变量 x、y、z 的值和偏微商 $\frac{dz}{dx}=p$、$\frac{dz}{dy}=q$ 用新的量 x'、y'、z'、p'、q' 的函数表示出来。显然，相切曲面通过它一般地又变成了相切曲面，这就是确定切触变换这个名称的根据。从作为空间元素的点出发，切触变换可以分成三类：使三重无穷多的点又重新与点相对应的变换，这就是我们刚刚考察过的点变换；把三重无穷多的点变成曲线的变换；以及把它们变成曲面的变换。我们不应把这种分类看作实质性的分类，因为在利用三重无穷多的其他空间元素（例如平面）时，当然又得到了分成三个群的一种分类。然而，它与从点出发获得的分类并不吻合。

如果在一个点上实行所有的切触变换，就得到了点、曲线和曲面的全体。并且恰恰需要这些点、曲线和曲面的集合来构成这个群的体。我们还可以由此决定一般规则，但当利用点

(27) 特别参见已经引证的著作：«关于偏微分方程与复数»，«数学年鉴»，t.V(*Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe* Math. Ann. t. V)，本文内有关偏微分方程的论述，基本上来自李的口述；见下文注释：«偏微分方程的理论»(*Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*) *Göttinger Nachrichten*, 1872,10 月。

或面的坐标进行运算时，在切触变换意义下，形式地处理问题(例如下面就要谈到的偏微分方程论)则是不完备的，因为恰在此时取作基础的空间元素却不能构成体。

但是，如果要保持习惯的方法，那么作为空间元素引入包含在上述体内的所有个体，这也不可能实现，因为它们的数目是一个无穷重的无穷。在这些考察中，存在如下的必要性，即作为空间元素既不能引入点，也不能引入曲线和曲面，而是要引入曲面元素，亦即 x、y、z、p、q 的值组。对于任何切触变换，每个曲面元素都变成了一个新的曲面元素；于是，五重无穷的曲面元素构成一个体。

根据这种观点，我们应该把点、曲线、曲面同等地理解为曲面元素的集合(Aggregate)，并且是二重无穷的集合。事实上，曲面被∞^2 个元素所包络，曲线与同样数目的元素相切，每个点也有∞^2 个元素经过。但是，这些二重无穷多的元素集合，还有一个共同特点。如果对于两个相邻的曲面元素 x、y、z、p、q 和 $x+dx$、$y+dy$、$z+dz$、$p+dp$、$q+dq$，有

$$dz-pdx-qdy=0,$$

我们则称这两个曲面元素位置相连(vereinigte Lage)。因此，点、曲线、曲面是曲面元素的三个二重无穷流形，其中每个曲面元素都和与之相邻的单重无穷的曲面元素位置相连。这样，点、曲线和曲面就有了共同特点，并且当以切触变换群作为基础时，应该把它们解析地表示出来。

两个相邻元素的位置相连，是在切触变换下的不变关系。但是反过来说，切触变换也可以定义为五个变量 x、y、z、p、q 的这样的代换，在这种代换下，$dz-pdx-qdy$ 的关系保持不变。在这些考察中，空间应该被看作一个五维流形，并且，取如下的变量的变换总体为群，而这些变换使微分之间的一个确定关系式不变，在此基础上对这个流形进行研究。

研究对象首先是由变量间的一个或几个方程，即一阶偏微分方程和一阶偏微分方程组所表示的流形。主要问题在于，怎样从满足已知方程的元素构成的流形出发，连续求出一系列单重，二重无穷的元素，使每一个元素都与相邻元素位置相连。例如，一阶偏微分方程的求解问题，就归结为一个类似的问题。我们可以这样叙述它：从满足方程的四重无穷的元素出发，推出具有上述性质的全体二重无穷流形。特别是完全解的问题现在就有了这样一个精确形式：用一种方法把满足方程的四重无穷的元素，分解成二重无穷的这种流形。

在这里不打算继续多谈这种有关偏微分方程的考察，我只推荐已经引证过的李的著作。不过，我们还要强调一点，即从切触变换的观点来说，一阶偏微分方程没有任何不变性，因为它们每一个都能变成另外的任何一个，特别是线性方程不再与别的方程有什么不同。仅仅当回到点变换的观点时，区别才表现出来。

切触变换群、点变换群以及射影变换群，能够用一个我在这里不能不说几句的统一方式刻划其特点[28]。我们已经确定，切触变换就是保持两个相邻曲面元素位置相连的变换。点变换则与之相反，其特点是把处于相连位置的相邻的直线元素变成了恰好具有同样性质的直线元素。最后，直射与对偶变换则保持相邻连通元素的相连位置。我所说的连通元素，指的是一个曲面元素与包含在其中的一个直线元素构成的并集。当一个连通元素不仅是点，而且它的直线元素，都包含在另一个连通元素的曲面元素中时，我们就说这两个相邻的连通元素位置相连。连通元素这个(暂时的)名称，与克奈别希 Clebsch 在几何学中新引进的图形

(28) 我把这些观点归功于李的一个评注。

有关[29]，这种图形由同时包括点坐标、平面坐标与直线坐标的方程所确定。它在平面上的类似图形，由 Clebsch 那里取得了连通这个名称。

十．关于任意维流形

我们已经多次强调指出，在把前面的论述与空间概念联系在一起时，只是希望依靠直观的例子更容易阐明抽象的概念。但就其本身而论，这些考察与直觉的印象无关，它属于数学研究的一个领域，人们称之为多维流形理论，或者根据格拉斯曼简称为多维(延量)理论。为了实现把前面得到的理论从空间转移到纯粹的流形上，应当采用的方式可由其本身自然而然地设想出来。对此，我们只是再次提醒一下，与几何学相反，在抽象研究中，我们有权完全任意地选择变换群作为研究的基础，这样很有好处；而在几何学中，预先就给定了一个最小的群，即主群。

在这里，我们只能很简略地谈谈下列三种处理方法。

1. 射影的处理方法或现代代数学(不变量理论)

它的群由表示流形元素的变量的线性变换和对偶变换的集合所构成，这就是射影几何的推广。我们已经指出过，在高一维的流形中讨论无穷小时，这种方法怎样找到了应用。这种方法在下述意义上包括我们还要讲到的另外两种处理方法，即它的群包含了作为这两种方法的基础的群。

2. 常曲率流形

在黎曼 (Riemann) 的著作里，这种流形概念来自流形的更一般的概念，其中给定了变量的微分表达式。在这里，使给定表达式保持不变的变量变换集合构成了群。如果在射影意义上，规定了基于变量之间给定的二次方程所建立的度量关系时，那么就用另一方式得到了常曲率流形的概念。这个方法可推广到把变量假定为复变量的情况；随后，可以讨论把变量限定在实数域的情形。我们在第五、第六、第七各节中接触的一系列研究，就属于这个分支。

3. 平面流形

黎曼把曲率恒等于零的常曲率流形叫做平面流形。他的理论是初等几何的直接推广。当使得由两个方程(一个是线性方程，另一个是二次方程)所表示的图形保持不变时，它的群，也象初等几何中的主群一样，可以从射影几何群中分离出来。如果要适应通常表达理论的形式，那么就应该区别实数情况和虚数情况。在这种理论中，首先要列入初等几何本身，然后要列入例如说普通曲率理论最新的一般化成果，等等。

结　束　语

最后，我们还要说明两点看法，它们与我迄今所说的内容有着密切联系。第一点是关于体现概念发展的形式体系。在第二点中，我们要指出若干问题，它们按照这里提出的观点去

---

(29) Gött. Abhandlungen. 1872 (第 17 卷)：«关于不定式基本任务的理论»(*Ueber eine Fundementalaufgabe der Invariantentheorie*)，尤其是 Gött. Nachrichten 1872，第 22 期：«关于平面解析几何的新的基本机构» (*Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*).

处理看来是重要的和很有成效的。

对于解析几何，人们经常责难它通过引进坐标系任意选用元素的作法。对于由变量值刻划其局部特征的多维流形的所有处理方法，也同样遇到了这种责难。尤其是从前，如果说由于人们使用坐标方法并不完善，这种责难还言之成理的话，那么一旦我们采用了合理的处理方法，它自然就会消失了。在群的意义下研究流形时能出现的解析表达式，就其本身含义来说，应当与坐标系无关，而坐标系仍然可以任意选择，并且这种无关性应当在公式中明确地表示出来。现代代数学证明这是可能的，并且指出了怎样去完成的方法。在现代代数学里，这里谈到的形式化的不变量概念，实际上以最明显的方式突出地被说明了。它对于不变量的表达式有一个普遍与完备的构造法则，并且原则上只限于用这些表达式进行运算。如果用射影群以外的其他群作基础，这也同样应该要求提供解析的处理方法[30]。事实上，形式体系必须符合概念的内容，因此可以把形式体系作为概念的准确和清晰的表达式，或者利用它比较容易深入到尚未被研究的领域。

这里，将我们所说的一些观点与伽罗瓦 (Galois) 的方程论加以比较，就引导到提出我们还想谈论的下述问题。

在伽罗瓦 (Galois) 理论中，和这里一样，全部兴趣都集中于变换群。而与变换有关的对象当然很不相同；在那里，只涉及有限个不连续的元素，而此处则涉及一个连续流形的无穷个元素。但是由于群概念的统一性，容许人们继续作这种比较[31]。特别是，当 Lie 和我按照这里阐述的观点开始进行的某些研究中，也有这种特点时，我们更愿意在此指出这一点[32]。

在伽罗瓦理论中，例如塞莱 (Serret) 的高等代数教程(Traité d'Algèbre supérieure)或约当 (C. Jordan) 的置换教程 (Traité des substitutions) 表明，真正要完成的研究课题就是群论或置换论本身，方程论不过是由此产生的一种应用。同样，我们需要一种变换论，即一种由具有给定性质的变换所产生的群论。与在置换论中一样，可交换性和相似性等等概念，也都能够找到应用。在变换群基础上派生出来的关于流形的处理方法，作为变换论的一个应用而出现。

在方程论中，首先有系数的对称函数，它们带来了很多好处。其次，存在这样的表达式，它们即使不能对根的全体置换，至少也对根的相当多的置换，保持不变。由此类推，在以一个群作基础来研究流形的时候，我们首先需要确定体(第五节)，即经过群的全体变换保持不变的图形。但是，也还存在这样一些图形，它们不能接受群的全体变换，而只能接受群的某些变换，并且这种图形在以群作基础进行研究的意义上特别有趣，它们具有非常值得注意的性质。例如，在普通几何学中，人们区别对称体与规则体、旋转曲面与螺旋曲面，就是如此。如果我们站在射影几何的观点上，并特别要求使图形保持不变的那些变换必须是可交换的，那么就会导致由李和我在已引证过的论文中考察过的那些图形，以及第六节中提出的一般问题。第一节和第三节中给出了平面上无穷多个可交换线性变换群的定义，它属于我们

---

(30) [例如，对于三维空间中绕一定点旋转的变换群，通过四元数提供了这样的形式体系。]

(31) 对此，我要在这里指出，格拉斯曼在他的«延展论» (*Ausdehnungslehre*) (1844) 第一版引言中，已经对组合分析和延量理论作了比较。

(32) 参见我们合作的论文：«关于由单重无穷多可交换线性变换变为自身的封闭系统所表示的平面曲线» (*Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*. Math. Annalen, Bd. IV.)

刚刚所说的变换一般理论的一部分 [33,34]。

注　释

一、关于现代几何学中综合方法和解析方法的比较

目前，人们不再去注意现代综合几何学和解析几何学之间的实质性差别，因为，它们的研究内容和讨论方式越来越变得完全类似了。因此，在正文中，我们统统采用射影几何学这个词作为两种几何学的共同名称。如果说，综合方法更多地通过空间直观进行研究，并且以它的第一批基本理论而具有特殊的诱惑力的话，那么，一个这样的空间直观领域并不排除解析方法，并且，人们能把解析几何学的公式理解为几何关系的一个清晰而严谨的表达式。另一方面，当然不该低估一个非常合适的表述系统由于在一定程度上超越当时的思维而对后来的研究带来的好处。然而，也不应该放弃这样一个原则，即当一个数学问题还没有变成明显的直观时，就不应当被看作完全彻底解决了的问题；而只有表述系统的推进，才是迈出了很重要的头一步。

二、现代几何学的分科

举例来说，如果我们考察一下，数学物理学家在大多数情况下是怎样不愿借助于那怕是不十分发展的射影直观；而另一方面，射影几何学家又不去接触如曲面的曲率理论所揭示了的丰富多采的数学真理的宝藏，我们就不得不看到几何学知识的当前状况：一方面不十分完全，另一方面又是充满希望的过渡性的。

三、关于空间直观的重要性

在正文中，当我们把空间的直观看成某种重要的东西时，我们是指根据需要明确表示的诸考察的纯数学内容而言的：直观只不过是使这种考察变为容易感觉到的东西。事实上这种方法的作用，从教育学的观点看，应该认为有不可估量的意义。因此，按这种观点看一种几何模型是非常富有教育意义的，也是非常有趣的。

但是，空间直观的重要性的问题，一般说来，这完全是另外一回事。我把直观看成本身是某种独立存在的东西。这就存在着一种真正的几何学，对于类似正文中的研究，它并不仅仅给抽象考察以可以感觉的形式。在这里，空间图形应该按照它们的本来面貌来理解，并且（作为数学的一个侧面）应该作为空间直观公设的明显推论来揭示它们的关系。一种模型——它可以被阐述、被直观感觉到，或仅仅明显地摆在眼前，对于这种几何学，并不是一种达到目的的工具，而正是事情的本身。

当我们这样把几何学作为一个独立对象与纯数学互不相关地并列起来时，实际上，我们没有作出什么新的东西。而新近的研究差不多完全忽视了这一点，那么，再一次明确强调指出它当然是大家所希望的。不管怎样，新的研究方法纵然可能被掌握了，倒是难得用于研究空间实体的形式关系，虽然在这个方向上，它们恰恰显得前途无量。

（33）在正文里，我不想再来说明在微分方程理论中无穷小变换的研究所产生的成果。李和我在引证过的著作第七节里已经指出，采用同样无穷小变换的常微分方程，也出现了同样的积分困难。至于这些考察应该怎样应用于偏微分方程，李在不同场合，特别是在上面引证的论文(**Math. Ann. V**)中，用好几个例子进行了论述(参见 **Mitteilungen der Academie zu Christiania**, 1872 年 5 月)。

（34）[今天，我可以说明这个事实，即正文中谈到的两个问题恰恰继续指导着李和我本人后来的大部分工作。关于李的工作，我们要特别提出他的«连续变换群论»(*Théorie des groupes continus de transformations*)，它的系统论述，是两卷书的研究对象（莱比锡，1888 年卷 I，1890 年 卷 II）。根据现存文稿，在我后来的研究中，我可以指出关于规则体的研究、关于椭圆模函数的研究以及一般地关于单值函数的研究，这些单值函数允许作线性变换。1884 年，我在一部专著：*«Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade»*（莱比锡）中，阐明了第一批观点。不久以前，出版了«椭圆模函数原理»(*Théorie des fonctions modulaires elliptiques*)的第一卷，(莱比锡，1890 年。对于这部著作，弗留克 (**Fricke**) 先生曾给予我很大的帮助)。]

四、关于任意维流形

我们所考察的空间，作为点的存在场所，只有三维，从数学上看，这是无可争议的；但是，人们不知道，这一观点长期以来妨碍了我们去确定是不是有四维或任意维的空间，虽则我们只能亲身感受到三维空间。多维流形的理论在现代数学研究中越来越走在前面，以致在本质上，它的独立性是确定无疑的。同时，基于这种思想，在此当然确立了这样一种见解。人们不再讲一个流形的元素，而是讲一个高维空间的点，等等。就它本身来讲，这种表达方式有许多好处。只要回顾一下几何概念，它就是容易理解的。但是，它也有这样一个不利的结果，就是说，在大多数情况下，关于多维流形的研究被看成仅仅是一个和我们刚刚提到的关于空间本质的那些思想相一致的东西。再也没有什么东西比这个论点更缺乏根据了。如果这些见解是正确的，那么，这类数学研究会立刻找到一个几何应用；但是，它们的作用正如它们的目的一样，与这些见解完全无关，而是寓于纯数学的内容之中。

普吕克 (Plücker) 指出了完全另外一种形式，它引入依赖于任意多个参数的图形(曲线、曲面等等)作为空间元素(见正文的第五节)，从而把真实的空间看作一个任意的维流形。

格拉斯曼在《延展论》(*Ausdehnungslehre*)(1844) 中首先阐述了这样一种看法，即把一个任意维流形的元素当作类似于空间的点来考察。格拉斯曼完全摆脱了我们刚刚提到的关于空间本质的那些思想；顺便说一下，这些思想可以上溯到高斯提出的见解，并且随着黎曼关于多维流形的研究传播开来了。

格拉斯曼和普吕克的这两种观点，各有所长；这两种方法人们都在使用，根据需要，有时用这种，有时又用那种。

五、关于非欧几何学

正如人们最近的研究所证明的，在正文中所谈到的射影度量几何学基本上和人们抛弃了平行公设而得到的度量几何学相吻合，这种度量几何学冠以非欧几何学的名称，当今经常成为争辩和讨论的对象。如果说，在上文中，我们一般没有使用过这个名称，那么，其理由正和前一个注释的论述有关。人们把许多与数学毫不相干的思想和非欧几何学的名称联系在一起，这些思想一方面由于一种排斥异物所激起的热情而被接受，另一方面，在任何情况下，我们的纯数学研究使用这些思想时却一无所获。我们想在随后的论述中把这方面的概念弄得更加清楚。

关于平行理论的研究和它们进一步的发展在数学上有两方面的重要性。

首先，它们表明，平行公理不是它前面那些一般性公理的数学结果，人们可以把这点看作最终解决了的问题，但是，它却表达了一个先前的研究中没有被触动过的实质上是新的直观事实。类似的讨论不仅对几何学而且对于每一个公理可能并且应该是已经完成了，人们由此认识了这些公理相互之间的地位。

其次，这些研究给了我们一个严谨的数学概念，即常曲率流形的概念。如同我们已经指出的并且在第十节中充分展开了的那样，它与独立于每一种平行理论而发展起来的射影度量以最严谨的形式联系在一起。如果，就它本身来说，研究这种度量给数学带来了巨大的裨益，并且有一系列应用的话，那么，作为一个特殊情形(极端的情形)，它还包含了在几何学中给出的度量，并且站在更高的观点上对它进行研究。

一个完全独立于这些论述的问题是如何理解平行公理的基础，它到底是应该如一部分人所希望的，看作一个整体的绝对前提呢，还是如另一部分人所坚持的，仅仅看作根据经验近似建立起来的东西。如果在这里有理由接受后一种看法的话，那么，所提及的数学研究向我们指出了应该怎样去建立一种更严密的几何学。然而，这无疑是一个力求得到我们悟性普遍原则的哲学问题。显然，这样的数学家对于问题的提法不感兴趣，他希望他的研究不能看成依赖于哲学从这一方面或那一方面可能作出的答案。

六. 研究常曲率流形的线几何学

当我们在一个五维流形中把线几何学与射影度量结合起来时，就应当注意到这个事实，直线仅仅给我们提供了(在度量的意义下)流形的无穷远元素。因此，对其无穷远元素考察一下射影度量的含义是什么，非常有必要。我们将在这里阐述一下这个问题，以便排除把线几何学理解成度量几何学所造成的困难。我们把这些论述和直观的例子联系起来，这个例子给出了建立在二次曲面基础上的射影度量。

在空间中任取两个点，关于这个曲面就有一个绝对不变量：交比，它是这两点和这两点的连线与曲面的两个交点构成的；但是，如果这两个任意点恰恰位于曲面上，那么，这个交比等于零，而与这些点的位置无关，只是这两点位于母线上的情形除外，在这种情形下，它是不定的；如果它们不互相重合，那这是它们的相对位置所引起的唯一特殊情形；于是我们有定理：

在空间中，以二次曲面为基础建立的射影度量并没有对这个曲面上的几何学提供任何的度量。

与此有关的事实是，通过使曲面变成它本身的线性变换，人们可以使曲面上任意三点与另外三点相重合(1)。

为了要在曲面本身上有一个度量，必须限定变换群，而当使空间中任何一点（或它的极平面）保持固定时，就做到了这一点。首先，我们假定这个点不在曲面上。那么，从这一点把这个曲面投射到一个平面上，这就给出了一条圆锥曲线作为过渡曲线。在平面中，人们以这条圆锥曲线为基础建立了一个射影度量，随后再把它转移到曲面上(2)。这是一个真正的常曲率度量。于是有定理：

当使不在曲面上的一个点保持固定时，就在这个曲面上得到了一个常曲率度量。

同样，可以得到(3)：

若取曲面本身的一个点作为固定点，则在这个曲面上可得出一个零曲率度量。

对于曲面上所有这些度量，曲面的母线都是长度为零的直线。于是，曲面上弧元素的表达式，在不同的度量下，仅仅差一个常数因子。在曲面上，不存在一个绝对的弧元素，但是，我们尽可以讨论曲面上两个前进方向之间所构成的角。

现在，所有这些定理和论述都能直接应用于线几何学。而对于线空间本身，不会先验地存在任何一个真正的度量。只有使一个线丛保持固定时，才得到了一个这样的度量，并且，按照线丛是一般的或特殊的（一条直线），该度量就分别保持常曲率或零曲率。绝对弧元素的存在也与这个线丛的选择有关。但是，与已知长度为零的直线相交的相邻直线间的位移方向与它无关。同时，也可以讨论两个任意方向之间所构成的角(4)。

七、关于二元形式的解释

在这里，我们将指出，借助于 $x+iy$ 在球面上的解释，对于把二元三次形式和二元双二次形式结合在一起的基本形式系统，可以给出一个什么样的简明表示。

一个二元三次形式 f 有一个三次共变式 Q，一个二次共变式 Δ 和一个不变量 R(5)。f 和 Q 一起，形成了一组六次共变式

$$Q^2+\lambda Rf^2,$$

其中也含有 Δ^3。人们可以证明(6)，三次形式的每个共变式都可以分解为这样的六点系统。只要 λ 取复数值，就有一组二重无穷的共变式。

如此确定的基本形式系统现在可以在球面上表示成下述形式(7)：我们通过一个适当的线性变换，把由 f 表示的三个点变到一个大圆上三个等距离的点。这个大圆可以看成赤道；位于大圆上的 f 的三个点的经度是 0°、120°、240°。那么，Q 由赤道上其经度分别是 60°、180°、300°的点表示，而 Δ 由两极来表示。每一个基本形式 $Q^2+\lambda Rf^2$ 都由六个点表示，这些点的纬度和经度包含在下表中，其中 α 和 β 可以取任意数：

---

(1) 这个关系在通常的度量几何学中被改变了；对两个无穷远点，当然有一个绝对不变量。当打算施行无穷远曲面所能允许的线性变换时可能遇到的矛盾，在考察平移或相似变换时解决了，这些平移和相似变换在上述变换之列，但不使无穷远发生任何变化。

(2) 见正文第七节。

(3) 见正文第四节。

(4) 见«论文»：«关于线几何学及量度几何学»(*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*)(Math. Annalen, t. V, p.271)。

(5) 见 Clebsch 关于这个问题的文章：«二次形式理论»(*Theorie der binären Formen*)。

(6) 通过考察使 f 变为它本身的线性变换。见 Math. Ann., IV. p. 352。

(7) [也可以见 Beltrami：«二元三次形式几何学的研究»(*Recerche sulla Geometria delleforme binarie cubiche*)(Memorie Acc. Bologna; 1870)。]

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120°+\beta$	$240°+\beta$	$-\beta$	$120°-\beta$	$240°-\beta$

按照球面上这些点组，我们可以很有趣地看出，f 和 Q 怎样二次重复地及 Δ 怎样三次重复地由它产生出来。

一个双二次形式有一个也是双二次的共变式 H，一个六次共变式 T 及两个不变量 i 和 j。特别值得注意的是，双二次形式 $iH+\lambda jf$ 的集合都总是和同一个 T 相适应；T 可以分解成的三个二次因子都属于这个集合，其中每个因子都被两重计算。

现在，我们由球的中心作三条互相垂直的轴 ox、oy、oz。那么，它们和球面的六个交点构成基本形式 T。当由 x、y、z 表示球面上任何一点的坐标时，那么与一个双二次形式 $iH+\lambda jf$ 相适应的四个点，则由表

$x,$	$y,$	z
$x,$	$-y,$	$-z$
$-x,$	$y,$	$-z$
$-x,$	$-y,$	z

给出。

这四个点总是一个对称的四面体的顶点，该四面体的对边被坐标轴二等分；T 在双二次方程理论中作为 $iH+\lambda jf$ 的预解式所起的作用就这样被明确指出来了。

1872 年 10 月于爱尔朗根

（本篇参照德、法两种文本译出。德文本据《*The new Mathematical Intelligence*》1977年8月所载Felix Klein 1872 年的德文原本《*Vergleichende Belrachtungen über neuere geometrische Forschungen*》。法文本系 Padé 1891年所译，见 Borix Rybak 主编的《方法论丛书》之一：Le Programme d'Erlangen, 1974年巴黎版。——译者）

（何绍庚、郭书春译，吴新谋、田方增、胡作玄校）